Varianta 62

Subiectul I.

a) $S_{ABC} = \sqrt{3}$.

b) $a = 1$.

c) $AB = AC = BC = 2$, deci triunghiul ABC este echilateral.

d) $h_B = \sqrt{3}$.

e) Distanța de la O la AB este de $2\sqrt{3}$.

f) $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$.

Subiectul II.

1.

a) $x_1^3 + x_2^3 = -2$.

b) $10\sqrt{2}$.

c) Numărul funcțiilor $f : A \to B$, unde $A = \{1, 2\}$ şi $B = \{1, 2, 3\}$ este egal cu 9.

d) $\begin{cases} a = -2 \\ b = 8 \end{cases}$.

e) $x > 0$.

2.

a) $f'(x) = \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, \quad \forall\, x \ge 1$.

b) Avem $f'(x) < 0 \iff x > 1$, aşadar f este strict descrescătoare pe $[1, \infty)$.

c) Dreapta $Ox : y = 0$ este asimptota (orizontală) spre $+\infty$ la graficul funcției.

d) Folosind monotonia şi continuitatea funcției f se arată că $\operatorname{Im} f = (0, 1]$.

e) $\int_1^2 f(x)\,dx = \ln \dfrac{5}{2}$.

Subiectul III.

a) Pentru $x = y = 0$ în relația din enunț, obținem $f(0) = 0$.

b) Pentru orice $x \in \mathbf{Q}$, punând $y = -x$ în relația din enunț şi folosind **a)** obținem $f(-x) = -f(x)$.

c) Se demonstrează prin inducție, folosind proprietatea din ipoteză.

d) Pentru $n = 0$ şi $x \in \mathbf{Q}$ oarecare, avem $f(0 \cdot x) = f(0) = 0 = 0 \cdot f(x)$

Pentru $n \in \mathbf{N}^*$ şi $x \in \mathbf{Q}$ oarecare, alegând $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x$ în (1) obținem $f(nx) = n \cdot f(x)$.

e) Pentru $n \in \mathbf{N}^*$, alegând $x = \dfrac{1}{n}$ în **d)** obținem $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{a}{n}$.

Dacă $x \in \mathbf{Q}$, $x > 0$, atunci există $p, n \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $x = \dfrac{p}{n}$.

Din **d)** obținem $f(x) = f\left(p \cdot \dfrac{1}{n}\right) = a \cdot x$,

Pentru $x \in \mathbf{Q}$, $x < 0$, din **b)** și **a)** rezultă că $f(x) = a \cdot x$.

f) Evident, folosind definiția funcției bijective.

g) Considerăm subgrupul $(H, +)$ al grupului $(\mathbf{Q}, +)$, astfel încât există $f : \mathbf{Q} \to H$ un izomorfism de grupuri. Obținem că există $a \neq 0$, astfel încât $\forall\, x \in \mathbf{Q}$, $f(x) = a \cdot x$. Se arată ușor că $\operatorname{Im} f = \mathbf{Q}$, deci $H = \mathbf{Q}$.

Subiectul IV.

a) $g'(x) = x \cdot \cos x$, $\forall\, x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

b) $f'(x) = g\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$, $\forall\, x \in (0, \infty)$.

c) Evident, folosind punctul **a)**.

d) Din **c)**, rezultă că g este strict crescătoare pe $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, deci

$$\forall\, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),\quad g(x) > g(0) = 1.$$

e) Pentru orice $x > 2$, funcția f este o funcție Rolle pe intervalul $[x, x+1]$ și folosind teorema lui Lagrange deducem că există $c_x \in (x, x+1)$, astfel încât

$$\frac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x} = f'(c_x) \overset{\text{b)}}{=} g\left(\frac{\pi}{c_x}\right) \overset{\text{d)}}{>} 1$$

f) Pentru $n \geq 3$, dându-i lui x succesiv valorile $3, 4, \ldots, n-1$ în inegalitatea de la punctul **e)** și adunând relațiile obținute, deducem concluzia.

g) Pentru $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 3$, avem $0 < f(n) = n \cdot \cos\dfrac{\pi}{n} < n$.

Folosind punctul **f)** deducem:

$$-\frac{1}{n^2} + \frac{(n-2)(n-1)}{2n^2} < \frac{f(1) + f(2) + \ldots + f(n)}{n^2} < -\frac{1}{n^2} + \frac{(n-2)(n+3)}{2n^2}$$

și trecând la limită obținem $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{f(1) + f(2) + \ldots + f(n)}{n^2} = \dfrac{1}{2}$.